

TD 38 : Espérance, variance

Espérance (sans variance)

1 ★ Soit X et Y deux v.a. qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On définit $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

- 1) Montrer que $\mathbb{E}(SD) = \mathbb{E}(S)\mathbb{E}(D)$.
- 2) Est-ce que S et D sont indépendantes ?

2 ★★ On tire au hasard un entier X entre 1 et n , puis on tire à nouveau un entier Y entre 1 et X .

- 1) Déterminer la loi de Y sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.
- 2) Calculer (explicitement) l'espérance de Y .

3 ★★ On considère une urne avec une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, etc. jusqu'à n boules numérotées n . On tire au hasard une boule de cette urne et on note X le numéro obtenu.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Déterminer l'espérance de X , puis de $\frac{1}{X}$, et de $\frac{2^X}{X}$.

4 ★★ (techniquement hors-programme MPSI) On propose de jouer au jeu suivant : le joueur A donne x euros au joueur B , puis le joueur A tire à pile ou face jusqu'à obtenir pile.

- Si A obtient zéro face, le joueur B lui donne un euro.
- Si A obtient une faces, le joueur B lui donne deux euros.
- Si A obtient deux faces, le joueur B lui donne quatre euros.
- etc.

Pour quelle valeur de x est-ce que le jeu est équitable ?

Espérance, variance, covariance

5 ★ On considère U et V deux v.a. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $X = U + V$ et $Y = U - V$.

- 1) Calculer la covariance de X et Y .
- 2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

6 ★★★ Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) .

- 1) Rappeler la loi que suivent les v.a. $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
- 2) Simplifier $\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.
- 3) Montrer que pour tous événements A', B' disjoints, on a $\text{Cov}(\mathbb{1}_{A'}, \mathbb{1}_{B'}) \leq 0$
- 4) En déduire que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.

7 ★★ On considère un péage autoroutier avec 3 barrières. Un total de n voitures franchissent ce péage en passant (indépendamment les unes des autres) par une des 3 barrières. On note X_1, X_2 et X_3 les v.a. qui correspondent au nombre de voitures ayant franchi chacune des 3 barrières, respectivement.

- 1) Déterminer la loi de X_1 .
- 2) Calculer les variances de X_1 , de X_2 et de $X_1 + X_2$.
- 3) En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

8 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ un $(n+1)$ -uplet de v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On pose pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la v.a. $Y_i = X_i X_{i+1}$.

- 1) Déterminer la loi de Y_i .
- 2) On suppose $n \geq 3$. Les v.a. Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? Les v.a. Y_1 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
- 3) Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Inégalités probabilistes

9 ★★ (CCINP) Soit $\varepsilon > 0$ et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . Soit $F = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

1) Démontrer que

$$\mathbb{P}(|F - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

2) On effectue des tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

10 ★★ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq b$ et X une v.a. à valeurs dans $[a, b]$.

1) Montrer que $\frac{1}{X} \leq \frac{a+b-X}{ab}$.

2) En déduire que $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}$.